

Tích Phân

KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

I. Định nghĩa:

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K . Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì hiệu số

$$F(b) - F(a)$$

được gọi là tích phân của $f(x)$ từ a đến b và kí hiệu là: $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

II. Tính chất:

• Tích phân tại một giá trị xác định của biến số thì bằng 0, tức là $\int_a^a f(x)dx = 0$

• Đổi cận thì đổi dấu, tức là $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

• Hằng số trong tích phân có thể đưa ra ngoài dấu tích phân, tức là

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (k \text{ là hằng số})$$

• Tích phân một tổng bằng tổng các tích phân, tức là

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

• Tách đôi tích phân, tức là $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

• Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

• Nếu $f(x) \geq g(x)$ trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Chú ý: Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ chỉ phụ thuộc vào hàm f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào

biến số x , tức là $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

• **Ý nghĩa hình học của tích phân** : Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng

$$x = a, x = b \text{ là } S = \int_a^b f(x)dx$$

Câu Hỏi Trắc Nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Hãy chọn mệnh đề sai dưới đây:

A. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

B. $\int_a^b kdx = k(b-a)$.

C. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $c \in [a;b]$.

D. $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$.

Câu 2: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K và a, b là hai điểm của K , ngoài ra k là một số thực tùy ý. Khi đó:

(I). $\int_a^a f(x)dx = 0$

(II). $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$

(III). $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

Trong ba công thức trên:

A. Chỉ số (I) sai.

B. Chỉ có (II) sai.

C. Chỉ có (I) và (II) sai.

D. Cả ba đều đúng.

Câu 3: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

A. $\int_{-1}^1 dx = 1$.

B. $\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_a^b f_2(x)dx$.

C. Nếu $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

D. Nếu $\int_0^a f(x)dx = 0$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với mọi a, b, c thuộc tập xác định của $f(x)$.

B. Nếu $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \in [a;b]$.

C. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 2\sqrt{1+x^2} + C$.

D. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $\sqrt{F(x)}$ là nguyên hàm của hàm số $\sqrt{f(x)}$.

Câu 5: Đặt $F(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$. Đạo hàm $F'(x)$ là hàm số nào dưới đây?

A. $F'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

B. $F'(x) = \sqrt{1+x^2}$

C. $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

D. $F'(x) = (x^2+1)\sqrt{1+x^2}$

Câu 6: Cho $F(x) = \int_1^x (t^2+t) dt$. Giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ trên đoạn $[-1;1]$ là:

A. $\frac{1}{6}$

B. 2

C. $-\frac{5}{6}$

D. $\frac{5}{6}$

Câu 7: Cho $F(x) = \int_0^x \frac{t-\sqrt{3}}{t^2+1} dt$. Xét các mệnh đề:

I. $F'(x) = \frac{x-\sqrt{3}}{x^2+1}$

II. Hàm số $F(x)$ đạt cực tiểu tại $x = \sqrt{3}$

III. Hàm số $F(x)$ đạt cực đại tại $x = \sqrt{3}$

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I

B. Chỉ II

C. I và II

D. I và III

Câu 8: Hãy chọn mệnh đề sai dưới đây:

A. $\int_0^1 x^2 dx \geq \int_0^1 x^3 dx$

B. Đạo hàm của $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t}$ là $F'(x) = \frac{1}{1+x}$ ($x > 0$)

C. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

D. Nếu $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thì $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

Câu 9: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và $\int_{-3}^0 f(x) dx = a$. Chọn mệnh đề đúng:

A. $\int_0^3 f(x) dx = -a$

B. $\int_{-3}^3 f(x) dx = 2a$

C. $\int_{-3}^3 f(x) dx = a$

D. $\int_3^0 f(x) dx = a$

Câu 10: Nếu $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục và $\int_1^4 f'(x) dx = 17$. Giá trị của $f(4)$ bằng:

A. 29

B. 5

C. 19

D. 40

Câu 11: Cho $\int_2^5 f(x) dx = 10$. Khi đó $\int_5^2 [2 - 4f(x)] dx$ bằng:

A. 32

B. 34

C. 36

D. 40

Câu 12: Cho hàm f liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_a^d f(x) dx = 10$, $\int_b^d f(x) dx = 18$, $\int_a^c f(x) dx = 7$. Tính

$I = \int_b^c f(x) dx$, ta được:

A. $I = -5$

B. $I = 7$

C. $I = 5$

D. $I = -7$

Câu 13: Cho biết $\int_1^3 f(x) dx = -2$, $\int_1^4 f(x) dx = 3$, $\int_1^4 g(x) dx = 7$. Khẳng định nào sai?

A. $\int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = 10$

B. $\int_3^4 f(x) dx = 1$

C. $\int_3^4 f(x) dx = -5$

D. $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)] dx = -2$

Câu 14: Giả sử A, B là các hằng số của hàm số $f(x) = A \sin(\pi x) + Bx^2$.

Biết $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Giá trị của B là:

A. 1

B. Một giá trị khác

C. 2

D. $\frac{3}{2}$

Câu 15: Giá trị nào của b để $\int_1^b (2x - 6) dx = 0$

A. $b = 0$ hoặc $b = 3$

B. $b = 0$ hoặc $b = 1$

C. $b = 5$ hoặc $b = 0$

D. $b = 1$ hoặc $b = 5$

Câu 16: Nếu $\int_0^a (\cos x + \sin x) dx = 0$ ($0 < a < 2\pi$) thì giá trị của a bằng

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{3\pi}{2}$

D. $\frac{\pi}{3}$

Câu 17: Nếu kết quả của $\int_1^2 \frac{dx}{x+3}$ được viết dưới dạng $\ln \frac{a}{b}$ với a, b là các số tự nhiên và ước chung lớn nhất của a và b là 1. Chọn khẳng định sai

- A. $3a - b < 12$ B. $a + 2b = 13$ C. $a - b > 2$ D. $a^2 + b^2 = 41$

Câu 18: Kết quả của tích phân $\int_{-1}^0 \left(x+1 + \frac{2}{x-1} \right) dx$ được viết dưới dạng $a + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

khi đó $a + b$ bằng:

- A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $-\frac{5}{2}$

Đáp Án

1. D	2. B	3. C	4. A
5. B	6. C	7. C	8. C
9. B	10. A	11. B	12. C
13. B	14. D	15. D	16. C
17. C	18. B		